数理解析研究所講究録
942 巻 1996 年 142-152

On Some Examples of Modular QM-Abelian Surfaces

早大理工　長谷川雄之 (Yuji HASEGAWA)

1　準備

$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ を $\Gamma_1(N)$ 上の重さ 2 の newform とする．ここで，newform とは，すべての Hecke 作用素の同時固有形式で，$a_1=1$ となるように正規化されたものを指すことにする．このとき f の Fourier 係数の生成する C の部分体 $K_f:=\mathbf{Q}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ は有限次代数体となる．$A_f/\mathbf{Q}$ を f に付随する Shimura の Abel 多様体とする ([13], [14]). 以下では，A_f に Q- 同種な Abel 多様体を modular な Abel 多様体ということがある．A_f の次元は K_f の次数に一致し，しかも

$$\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(A_f)\otimes\mathbf{Q}\cong K_f$$

という著しい性質をもつ．ここで $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(A_f)\otimes\mathbf{Q}$ は，A_f の Q 上の自己準同型のなす Q- 多元環である．さらに，A_f の $\bar{\mathbf{Q}}$ 上の自己準同型のなす Q- 多元環 $\mathfrak{X}_f=\mathrm{End}_{\bar{\mathbf{Q}}}(A_f)\otimes\mathbf{Q}$ の構造の型も [9], [8] により決定されている．

さて，以下では f に関して常に次のことを仮定する．

(1)　f は CM 型でない;

(2)　f は Haupt 型の重さ 2 の newform である (すなわち f はある N について $\Gamma_0(N)$ 上の重さ 2 の newform となっている);

(3)　K_f は 2 次体である．

(1) において，$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ が CM- 型であるとは，ある自明でない Dirichlet 指標 ψ が存在して，

$$a_p=\psi(p)a_p$$

がほとんどすべての素数 p に対して成り立つことをいう．（このとき A_f はある CM- 型楕円曲線の直積 $E\times E$ に $\bar{\mathbf{Q}}$ 上同種となる．）以下ではこの場合は取り扱わない．また，上記の仮定 (2) から K_f は総実な代数体となるから，

仮定 (3) とあわせて結局 K_f は実 2 次体となる．したがって，A_f は $\mathbf{Q}$ 上で実 2 次体 K_f の作用を受ける Abel 曲面である．次に $\mathfrak{X}_f$ であるが，これは，K_f，$\mathrm{M}_2(\mathbf{Q})$ または $\mathbf{Q}$ 上の不定符号四元数体のいずれかとなる．これらのうちのどれになるかは，いわゆる extra twist に関する情報で決まる ([9], [8])．

定義 f は上の仮定のとおりとし，χ を Dirichlet 指標とする．f が χ による extra twist をもつとは，

$$a_p{}^{\sigma} = \chi(p)a_p$$

がほとんどすべての素数 p について成り立つことをいう．ここで σ は $K_f/\mathbf{Q}$ の自明でない自己同型とする．

$S_2^0(N)$ を $\Gamma_0(N)$ 上の重さ 2 の newforms の張る空間とし，$f \in S_2^0(N)$，σ を上の定義のとおりとするとき，$f^{\sigma} = \sum a_n{}^{\sigma} q^n$ も $S_2^0(N)$ に属する newform である．また，χ を導手 r をもつ任意の Dirichlet 指標とすると，条件「$(p,r) = 1$ なる素数 p に対して $b_p = \chi(p)a_p$」により一意に定まる newform $g = \sum b_n q^n$ が存在するが，この g を $f \otimes \chi$ と書くと，f が χ による extra twist をもつということは

$$f^{\sigma} = f \otimes \chi$$

が成り立つことということができる．χ は仮定 (1) から一意的に定まる．また，このとき χ は 2 次指標で，その導手を r とすると $r^2|N$ である．さらに任意の n に対して $a_n{}^{\sigma} = \chi(n)a_n$ が成り立つ．以下，χ は一般に 2 次指標を表すこととし，その導手を明示するときは，$\chi = \chi_r$ と書くことにする．

命題 1 f は上の仮定のとおりとし，$\chi = \chi_r$ による extra twist をもつとする．このとき，

$$\mathfrak{X}_f = \left(\frac{d, \chi(-1)r}{\mathbf{Q}}\right).$$

ここで，$\left(\dfrac{a, b}{\mathbf{Q}}\right)$ は $\mathbf{Q}$ 上の四元数環で，その被約ノルム形式が $x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2$ により与えられるものを表す．また，d は K_f の判別式である．

証明 これは [9], [8] の結果より直ちに導かれる．∎

f が extra twist をもたなければ，$\mathfrak{X}_f = K_f$ である．f が extra twist をもつとき，上の命題によって $A_f/\bar{\mathbf{Q}}$ は CM をもたない楕円曲線の直積に分解するか，$\mathbf{Q}$ 上の四元数体の作用を受ける単純な Abel 曲面となる．

定義 $\mathfrak{X}_f$ が四元数体のとき，A_f は QM (=quaternion multiplication) を

もつといい，A_f を (modular な) QM- 型 Abel 曲面という．

命題 2 $f \in S_2^0(N)$ は上の仮定のとおりとし，対応する A_f が QM をもつとする．N の各素因子 p に対して，$\nu = \nu_p$ を $p^\nu \| N$ により定めると，次が成り立つ．

(1) $p = 2$ のとき $2 \leq \nu \leq 10$,

(2) $p = 3$ のとき $2 \leq \nu \leq 5$,

(3) $p \geq 5$ のとき $\nu = 2$.

さらに，N は 2^5 で割れるか，あるいは少なくともひとつの素因子 p について $p \equiv 3 \pmod 4$ が成り立つ．

証明 仮定により f は extra twist をもつ．もし N がある素数でちょうど割り切れていれば，$\mathfrak{X}_f = \mathrm{M}_2(\mathbf{Q})$ である ([10], Theorem 2). したがって，A_f が QM をもつならば N の各素因子について $\nu \geq 2$ が満たされなければならない．次に，N の各素因子 p に対して

$$s = s_p = \left\lceil \frac{\nu}{2} - 1 - \frac{1}{p-1} \right\rceil$$

とおく ($\lceil x \rceil$ は $n \geq x$ なる最小の整数 n を表す). このとき，[3] の Theorem 5.5 より $\mathfrak{X}_f$ の中心は $p > 2$ のとき $\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$, $p = 2$ のとき $\mathbf{Q}(\zeta^2 + \zeta^{-2})$ を含む．ただし $\zeta = \exp(2\pi i/p^s)$ とする．これより ν の範囲がわかる．命題の最後の部分は [10] の Theorem 2 および [1] の Theorem 7 より従う．∎

QM- 型の modular な Abel 曲面 $A_f/\mathbf{Q}$ の例は，[7] に与えられている．この場合 $N = 243 = 3^5$, $K_f = \mathbf{Q}(\sqrt{6})$, $\chi = \chi_3 = \left(\frac{-3}{\cdot}\right)$ で，$\mathfrak{X}_f = \left(\frac{6, -3}{\mathbf{Q}}\right)$ は判別式が 6 の四元数体である．$N \leq 300$ においては，これが唯一の QM- 型 Abel 曲面 $/\mathbf{Q}$ の例となっている．また，これ以外に A_f が QM- 型 Abel 曲面 となっている例は知られていないようなので，他の例を与えてみるのは意味のあることである．そこで，$301 \leq N \leq 3000$ なる N に対してそのような例を探し求めた．

2 計算結果

$301 \leq N \leq 3000$ なる N で 命題 2の条件を満たすものは全部で 41 個あるが，それらに対して，$S_2^0(N)$ を $\mathbf{Q}$- 単純な部分空間の和に分解した．分解には，Hecke 作用素の跡公式を用いた ([6],[15],[11]). 表 1 はその結果である．表の見方は [2] の Table 5 と全く同じであるが，ここでは紙面節約のため乗法

的に表した．例えば，「$(1{\cdot}3{\cdot}4, 1{\cdot}2^4{\cdot}3)$」は「$(1+3+4, 1+2+2+2+2+3)$」と読み替える．

表 **1**: Q-simple splitting of $S_2^0(N)$

$N{=}\prod p^\nu$	splitting of $S_2^0(N)$
$324{=}2^2 3^4$	$(0, 0, 1^3, 1)$
$361{=}19^2$	$(1{\cdot}3{\cdot}4, 1{\cdot}2^4{\cdot}3)$
$392{=}2^3 7^2$	$(1, 1^2{\cdot}2, 1{\cdot}2, 1^2)$
$432{=}2^4 3^3$	$(1, 1^3, 1^2, 1^2)$
$441{=}3^2 7^2$	$(1, 1{\cdot}2^2, 1{\cdot}2^2, 1^3)$
$484{=}2^2 11^2$	$(0, 0, 2^3, 1{\cdot}2)$
$512{=}2^9$	$(2^3, 2^3{\cdot}4)$
$529{=}23^2$	$(4^2{\cdot}5, 2^5{\cdot}3{\cdot}5)$
$576{=}2^6 3^2$	$(1, 1^3, 1^3, 1^2)$
$648{=}2^3 3^4$	$(1^2, 2^2, 1{\cdot}2, 1{\cdot}2)$
$675{=}3^3 5^2$	$(1^2{\cdot}2, 1^2{\cdot}2^3, 1^4{\cdot}2^2, 1{\cdot}2^2)$
$784{=}2^4 7^2$	$(1^2{\cdot}2, 1^4{\cdot}2, 1{\cdot}2^2, 1^3)$
$800{=}2^5 5^2$	$(1^3, 1^2{\cdot}2^2, 1^2{\cdot}2^2, 1^2{\cdot}2)$
$864{=}2^5 3^3$	$(1^3, 1^3{\cdot}2, 1^3{\cdot}2, 1^3)$
$900{=}2^2 3^2 5^2$	$(0, 0, 0, 0, 1^2, 1, 1^2, 1^3)$
$961{=}31^2$	$(2^2{\cdot}8{\cdot}16, 2^4{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}8{\cdot}12)$
$968{=}2^3 11^2$	$(1{\cdot}2^2, 1{\cdot}2^2{\cdot}4, 1{\cdot}2{\cdot}4, 1^2{\cdot}2^2)$
$972{=}2^2 3^5$	$(0, 0, 1^2{\cdot}2{\cdot}3, 1^2{\cdot}3)$
$1024{=}2^{10}$	$(2^2{\cdot}4^2, 2^4{\cdot}4^2)$
$1089{=}3^2 11^2$	$(2{\cdot}4, 1^4{\cdot}2^2{\cdot}4, 1{\cdot}2^4{\cdot}4, 1^6{\cdot}2^2)$
$1152{=}2^7 3^2$	$(1^4, 1^7, 1^4, 1^5)$
$1225{=}5^2 7^2$	$(2^3{\cdot}3{\cdot}4, 1^4{\cdot}2^4{\cdot}3, 1^2{\cdot}2^2{\cdot}3{\cdot}4^2, 1^4{\cdot}2^3{\cdot}3)$
$1296{=}2^4 3^4$	$(1^3{\cdot}2, 1{\cdot}2^3, 1^6, 1^2{\cdot}2)$
$1323{=}3^3 7^2$	$(1{\cdot}3{\cdot}4^2, 1^9{\cdot}2^2{\cdot}3, 1^2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4^2, 1^7{\cdot}2{\cdot}3)$
$1444{=}2^2 19^2$	$(0, 0, 1{\cdot}2{\cdot}6{\cdot}8, 1^2{\cdot}2^2{\cdot}6)$
$1521{=}3^2 13^2$	$(1^2{\cdot}2{\cdot}6, 2{\cdot}4^2{\cdot}6, 1^3{\cdot}2^3{\cdot}3^3, 2^3{\cdot}3^3)$
$1568{=}2^5 7^2$	$(2^4, 1^6{\cdot}2^3, 2^4{\cdot}4, 1^3{\cdot}2^3)$
$1600{=}2^6 5^2$	$(1^8, 1^6{\cdot}2^2, 1^5{\cdot}2^2, 1^6{\cdot}2)$
$1728{=}2^6 3^3$	$(1^5{\cdot}2, 1^7{\cdot}2, 1^9, 1^7)$

表 1: Q-simple splitting of $S_2^0(N)$ (continued)

$N{=}\prod p^\nu$	splitting of $S_2^0(N)$
$1764{=}2^2 3^2 7^2$	$(0,0,0,0,1{\cdot}4,1^2,1^2{\cdot}2,1^6)$
$1800{=}2^3 3^2 5^2$	$(1^2,1^3,1^4,1^3,1^2,1^3,1^3,1^4)$
$1849{=}43^2$	$(1^2{\cdot}2^2{\cdot}3^2{\cdot}10{\cdot}18{\cdot}20,1^2{\cdot}2^2{\cdot}3^2{\cdot}18{\cdot}20^2)$
$1936{=}2^4 11^2$	$(1^2{\cdot}2^3{\cdot}4,1^3{\cdot}2^4{\cdot}4,1{\cdot}2^6,1^6{\cdot}2^2)$
$1944{=}2^3 3^5$	$(1^2{\cdot}2^2{\cdot}3,1^3{\cdot}6,1^2{\cdot}2^2{\cdot}6,1^3{\cdot}3)$
$2025{=}3^4 5^2$	$(1^5{\cdot}2^2{\cdot}3{\cdot}4,2^2{\cdot}4^4,1{\cdot}2^3{\cdot}3{\cdot}4,4^4)$
$2116{=}2^2 23^2$	$(0,0,6{\cdot}8{\cdot}10,1^4{\cdot}2^2{\cdot}10)$
$2209{=}47^2$	$(16{\cdot}24{\cdot}33,1^2{\cdot}3^2{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}8{\cdot}10{\cdot}16{\cdot}33)$
$2304{=}2^8 3^2$	$(1^2{\cdot}2^2,1^6{\cdot}2^3,1^2{\cdot}2^2{\cdot}4,1^6{\cdot}2^2)$
$2592{=}2^5 3^4$	$(1^3{\cdot}2^4,1{\cdot}2^2{\cdot}4^2,1^3{\cdot}2^3{\cdot}4,1{\cdot}2^3{\cdot}4)$
$2601{=}3^2 17^2$	$(1^4{\cdot}2^3{\cdot}3{\cdot}6,1^2{\cdot}3{\cdot}4^2{\cdot}6{\cdot}8,1^6{\cdot}2^3{\cdot}3^2{\cdot}4^2{\cdot}6,2^2{\cdot}3^2{\cdot}4^3{\cdot}6)$
$2888{=}2^3 19^2$	$(1^2{\cdot}2{\cdot}3^2{\cdot}8,2^2{\cdot}3^2{\cdot}6{\cdot}9,2{\cdot}3{\cdot}8{\cdot}9,1^4{\cdot}2^2{\cdot}3^2{\cdot}6)$

表 1 中には 2 次元の Q- 単純な部分空間が全部で 198 ある．このうちで，対応する Abel 曲面が QM- 型となっているのは全部で 18 個ある．以下にそれらについて説明する．

(1) $N = 675 = 3^3{\cdot}5^2$ とする．このとき $\dim S_2^0(675) = 25$ であって，$S_2^0(675)$ の Q- 単純な各部分空間上での Hecke 作用素 $T(p)$ $(p \le 19)$ の特性多項式は表 2 のようになる (表中の符号は Atkin–Lehner の対合 W_{27}, W_{25} の固有値を表す)．それによると， extra twist をもつような Q- 単純 2 次元部分空間が 4 つ存在することがわかる．そのうちの 2 つは， $K_f = \mathbf{Q}(\sqrt{7})$ で，$\chi_3 = \left(\dfrac{-3}{\cdot}\right)$ による extra twist をもつが，命題 1 により $\mathfrak{X}_f = \left(\dfrac{7,-3}{\mathbf{Q}}\right) = \mathrm{M}_2(\mathbf{Q})$ であることがわかる．次に，残りの 2 つの部分空間に属する 4 つの newform のうちのひとつを $f = \sum a_n q^n$ と書くと， $K_f = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ で， f は表 3 で与えられる Fourier 係数をもつ．ほかの 3 つは $f \otimes \chi_3$, $f \otimes \chi_5$, $f \otimes \chi_{15}$ で与えられる．さらに，これら 4 つの newform の間には，

$$f^\sigma = f \otimes \chi_3, \quad (f \otimes \chi_5)^\sigma = f \otimes \chi_{15} = (f \otimes \chi_5) \otimes \chi_3$$

なる関係がある．したがって f および $g = f \otimes \chi_5$ は χ_3 による extra twist をもつから，命題 1 により $\mathfrak{X}_f$, $\mathfrak{X}_g$ は判別式 6 の四元数体 $\left(\dfrac{2,-3}{\mathbf{Q}}\right)$ となる．すなわち， A_f, A_g は QM- 型 Abel 曲面である．

表 2: Characteristic polynomials $\Phi_{T(p)}(X)$ of $T(p)|S_2^0(675)$

p	$(+,+)$			$(-,-)$		
2	X	$X+1$	X^2+X-3	X^2-2	$X-1$	X^2+3X+1
7	$X-1$	X	$X^2+2X-12$	$(X+3)^2$	X	X^2
11	X	$X+5$	$X^2+2X-12$	X^2-18	$X+5$	X^2
13	$X+5$	$X-5$	X^2+6X-4	$(X+3)^2$	$X+5$	X^2
17	X	$X+4$	X^2+4X-9	X^2-8	$X-4$	$X^2+12X+31$
19	$X+7$	$X+2$	X^2-13	$(X-1)^2$	$X+2$	$X^2+4X-41$

p	$(+,-)$				
2	X	X^2-2	X^2-7	$X+1$	X^2-3X+1
7	$X+4$	$(X-3)^2$	$(X-3)^2$	X	X^2
11	X	X^2-18	X^2-28	$X-5$	X^2
13	$X-5$	$(X-3)^2$	$(X+2)^2$	$X+5$	X^2
17	X	X^2-8	X^2-28	$X+4$	$X^2-12X+31$
19	$X-8$	$(X-1)^2$	$(X-1)^2$	$X+2$	$X^2+4X-41$

p	$(-,+)$					
2	X	X^2-7	$X+2$	$X-2$	$X-1$	X^2-X-3
7	$X-4$	$(X+3)^2$	$X-3$	$X-3$	X	$X^2+2X-12$
11	X	X^2-28	$X-2$	$X+2$	$X-5$	$X^2-2X-12$
13	$X+5$	$(X-2)^2$	$X-5$	$X-5$	$X-5$	X^2+6X-4
17	X	X^2-28	$X+8$	$X-8$	$X-4$	X^2-4X-9
19	$X-8$	$(X-1)^2$	$X-1$	$X-1$	$X+2$	X^2-13

表 3: Fourier coefficients of $f=\sum a_n q^n$

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
a_p	$\sqrt{2}$	0	0	3	$3\sqrt{2}$	3	$-2\sqrt{2}$	1	$5\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$
p	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
a_p	2	9	$-3\sqrt{2}$	6	$-2\sqrt{2}$	$-7\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	-13	-3	$-9\sqrt{2}$
p	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
a_p	9	-5	$-\sqrt{2}$	0	3	$-6\sqrt{2}$	3	$-5\sqrt{2}$	-8	$-\sqrt{2}$
p	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
a_p	-18	$6\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	13	$12\sqrt{2}$	-1	6	-9	$4\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$

(2) $N = 972 = 2^2 \cdot 3^5$ とする．このとき $\dim S_2^0(972) = 12$ で，2 次元の Q- 単純部分空間がただひとつ存在する (表 1, 表 4 参照)．$f = \sum a_n q^n$ を対応する newform（のうちのひとつ）とする．f は表 5 で与えられる Fourier 係数をもつ．すなわち $K_f = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ で，$f^\sigma = f \otimes \chi_3$ が成り立つから，$N = 675$ のときと同じように，A_f は判別式 6 の四元数体の作用を受ける QM- 型 Abel 曲面である．

表 4: Characteristic polynomials $\Phi_{T(p)}(X)$ of $T(p)|S_2^0(972)$

p	$(-,+)$			
5	X	X	X^2-18	X^3-9X+9
7	$X-5$	$X+1$	$(X-2)^2$	X^3+3X^2-6X+1
11	X	X	X^2-18	$X^3-9X^2+18X+9$
13	$X-5$	$X-2$	$(X+1)^2$	$X^3+3X^2-6X-17$
17	X	X	X^2-18	$X^3-9X^2-9X+153$
19	$X+7$	$X-8$	$(X-5)^2$	$X^3+3X^2-6X-17$

p	$(-,-)$		
5	X	X	X^3-9X-9
7	$X+1$	$X+4$	X^3+3X^2-6X+1
11	X	X	$X^3+9X^2+18X-9$
13	$X+7$	$X-5$	$X^3+3X^2-6X-17$
17	X	X	$X^3+9X^2-9X-153$
19	$X+1$	$X+7$	$X^3+3X^2-6X-17$

表 5: Fourier coefficients of $f = \sum a_n q^n$

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
a_p	0	0	$3\sqrt{2}$	2	$3\sqrt{2}$	-1	$-3\sqrt{2}$	5	$-3\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$
p	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
a_p	-7	-4	$-6\sqrt{2}$	5	0	$3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	5	11	$-3\sqrt{2}$
p	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
a_p	-1	11	$9\sqrt{2}$	$-12\sqrt{2}$	-7	$6\sqrt{2}$	11	$-6\sqrt{2}$	-1	0
p	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
a_p	-1	$3\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	-10	$-3\sqrt{2}$	-13	-7	14	$-18\sqrt{2}$	0

(3) $\mathfrak{X}_f$ が判別式 6 の四元数体となっているような QM- 型 Abel 曲面 A_f は，このほかに $N = 1323$, 1568, 1849, 2592 および $N = 2601$ に存在する．もう少し詳しくいうと，$N = 1849$ に 1 つ，$N = 1323$, 1568, 2601 に 2 つずつ，$N = 2592$ に 4 つ存在する．表 6 に，それらに対応する newforms のはじめのいくつかの Fourier 係数を掲げておく．ただし，表中の χ は extra twist, 符号は Atkin–Lehner の対合の固有値を表す．$301 \le N \le 3000$ において，判別式が 6 の四元数体となっている例は，上の (1), (2) とあわせて，これらがすべてである．

下の表から示唆されるように，これらのうちのいくつかは，他の QM-Abel 曲面を twist して得られる．たとえば $N = 1323$ のときの 2 つの例は，互いに相手の χ_7-twist となっている．（この例以降では，Hecke 作用素の特性多項式の表は省略する．）

表 6: Fourier coefficients of $f = \sum a_n q^n$

$N=\prod p^\nu$	χ	sign	a_2	a_3	a_5	a_7	a_{11}	a_{13}	a_{17}
$1323=3^3 7^2$	$\left(\frac{-3}{\cdot}\right)$	$(+,-)$	$\sqrt{6}$	0	$-\sqrt{6}$	0	$2\sqrt{6}$	4	$\sqrt{6}$
		$(-,+)$	$\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	0	$2\sqrt{6}$	-4	$-\sqrt{6}$
$1568=2^5 7^2$	$\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$	$(-,+)$	0	$\sqrt{3}$	1	0	$3\sqrt{3}$	0	5
		$(-,-)$	0	$-\sqrt{3}$	-1	0	$3\sqrt{3}$	0	-5
$1849=43^2$	$\left(\frac{-43}{\cdot}\right)$	$(+)$	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	-1	-3	-7
$2592=2^5 3^4$	$\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$	$(+,+)$	0	0	-1	$2\sqrt{6}$	$-2\sqrt{6}$	3	-5
		$(-,+)$	0	0	1	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$	3	5
$2592=2^5 3^4$	$\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$	$(+,+)$	0	0	-1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-3	4
		$(-,-)$	0	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-3	-4
$2601=3^2 17^2$	$\left(\frac{-51}{\cdot}\right)$	$(+,+)$	$\sqrt{2}$	0	-1	$\sqrt{2}$	-1	1	0
		$(+,+)$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	1	1	0

(4) これまであげてきた例はすべて判別式が 6 の四元数体による QM をもっていたが，$N = 1568$ に判別式 14, $N = 2700$ に判別式 10 の四元数体

$(/\mathbf{Q})$ による QM をもつ Abel 曲面 A_f の例が存在する．以下に，これらに対する Fourier 係数の表を掲げておく．(表の見方は (3) に同じ．)

表 7: Fourier coefficients of $f = \sum a_n q^n$

$N = \prod p^{\nu}$	χ	sign	a_2	a_3	a_5	a_7	a_{11}	a_{13}	a_{17}
$1568 = 2^5 7^2$	$\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$	$(+,+)$	0	$\sqrt{7}$	-3	0	$-\sqrt{7}$	-4	1
		$(+,-)$	0	$-\sqrt{7}$	3	0	$-\sqrt{7}$	4	-1
$2700 = 2^2 3^3 5^2$	$\left(\frac{-3}{\cdot}\right)$	$(-,+,-)$	0	0	0	-1	$\sqrt{10}$	-3	$-2\sqrt{10}$
		$(-,-,-)$	0	0	0	1	$\sqrt{10}$	3	$2\sqrt{10}$

$301 \leq N \leq 3000$ において，QM をもつような Abel 曲面 A_f は上にあげた 18 個がすべてである．上の (3) でも述べたが，これらのうちのいくつかは，他の twist として得られる．したがって，$301 \leq N \leq 3000$ において，modular な QM-Abel 曲面 A_f は，twist の差を除けば，全部で 10 個存在する．

3　いくつかの注意

(1)　これまで，f を $\Gamma_0(N)$ 上の newform に限定し，なおかつ $\mathbf{Q}$ 上の QM-Abel 曲面のみを扱ってきたが，f の指標 (Nebentypus character) が非自明のときには，$N = 44,\ 56,\ 57,\ 77$, etc. のような小さな level で QM-Abel 曲面の例が存在する (たとえば [12])．これらの例では，A_f は 4 次元で，ある 2 次体上で（互いに Galois 共役な） QM-Abel 曲面の直積に分解し，$\mathfrak{X}_f = \mathrm{End}_{\bar{\mathbf{Q}}}(A_f) = \mathrm{M}_2(D)$, ただし D は不定符号四元数体 $/\mathbf{Q}$, となっている．

(2)　$\nu = 4$ または 6 のとき，$2^{\nu} \| N$ なる level N をもつ newforms は，すべて level $2^{\alpha}M$, $0 \leq \alpha \leq \nu - 1$, $M = N/2^{\nu}$ の newforms を twist することにより得られる ([1])．いいかえれば $S_2^0(2^{\nu}M)$ $(\nu = 4$ または6; $2 \nmid M)$ の情報はすべて $S_2^0(2^{\alpha}M)$, $0 \leq \alpha \leq \nu - 1$ から復元できる．したがって今の場合，表 1 中の $S_2^0(2^4M)$, $S_2^0(2^6M)$ (M は奇数) に対する計算は実は不要である．

(3)　これまでにあげた例が示すように，$p = 3$ に対しては，各 $\nu = 2, 3, 4,$

5 に対して $3^\nu||N$ なる導手 N をもつ QM-Abel 曲面が存在する．一方，$p=2$ については $\nu=2,5$ の場合にしか見つかっていない．（もちろん，$\nu=2$ のときの例を $\chi_4=\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$，$\nu=2,5$ のときの例を $\chi_8:=\left(\frac{8}{\cdot}\right)$ で twist すればそれぞれ $\nu=4,6$ のときの例が得られる．）

(4)　一般に，f を $\Gamma_1(N)$ 上の CM をもたない newform とし，χ を (2 次とは限らぬ) Dirichlet 指標とする．このとき，

$$\Gamma=\Gamma_f=\{\sigma : K_f\hookrightarrow \mathbf{C} \mid f^\sigma=f\otimes\chi \quad (\exists\chi)\}$$

は $\mathrm{Aut}(K_f/\mathbf{Q})$ に含まれる．実は Γ は Abel 群をなし，$\mathfrak{X}_f$ の中心 $\mathrm{Z}(\mathfrak{X}_f)$ を F_f とおけば K_f/F_f は Abel 拡大で，$\mathrm{Gal}(K_f/F_f)\cong\Gamma$ が成り立つ ([9],[8])．第 1 節，第 2 節で扱ったのは，f が Haupt 型で，$F_f=\mathbf{Q}$, $[K_f:F_f]=|\Gamma|=2$, かつ A_f が ($\bar{\mathbf{Q}}$ 上) 単純となっているものである．また，上の (1) で言及した $\mathfrak{X}_f=\mathrm{M}_2(D)$ の例では，f は非自明な指標をもち，$F_f=\mathbf{Q}$, $[K_f:F_f]=|\Gamma|=4$ となっている．なお，f が Haupt 型で，$F_f=\mathbf{Q}$, $[K_f:F_f]=|\Gamma|=4$, かつ $\mathfrak{X}_f=\mathrm{M}_2(D)$ となっている例が，上記表 1 中にいくつか存在する．($S_2^0(N)$ 中にそのようなものが存在するならば，N はやはり命題 2 の条件を満たすことが必要である.) これらも興味深い考察対象であるが，今回は $\mathbf{Q}$ 上の QM-Abel 曲面に焦点をあてたため，これらについては割愛する．

(5)　f が第 1 節の仮定を満たし，しかも extra twist をもつが $\mathfrak{X}_f=\mathrm{M}_2(\mathbf{Q})$ となるような例，すなわち上の (4) の記号で $F_f=\mathbf{Q}$, $[K_f:F_f]=|\Gamma|=2$ であって，A_f が $\bar{\mathbf{Q}}$ 上分解するような例は数多く存在する．(たとえば $N=63=3^2\cdot 7$, $N=169=13^2$, etc.) そのような例は $N=1024=2^{10}$ においても (twist の差を除いて 2 つ) 存在する (cf. 本節 (3))．$N=1024$ の例では，ともに $K_f=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ で，extra twist が χ_8 になっている．

参考文献

[1] A.O.L. Atkin and J. Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, *Math. Ann.* **185** (1970), 134–160.

[2] A.O.L. Atkin and D.J. Tingley, Table 5, pp.135–141, Modular functions of one variable IV, Lecture Notes in Mathematics No.476, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1975.

[3] A. Brumer, "The rank of $J_0(N)$", Columbia University Number Theory Seminar, Astérisque **228** (1995), 41–68.

[4] Y. Hasegawa, On some examples of modular QM-abelian surfaces, to appear in *Proc. Japan Acad.*

[5] K. Hashimoto and N. Murabayashi, Shimura curves as intersections of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two, *Tôhoku Math. J.* **47** (1995), 271–296.

[6] H. Hijikata, Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$, *J. Math. Soc. Japan* **26** (1974), 56–82.

[7] M. Koike, On certain abelian varieties obtained from new forms of weight 2 on $\Gamma_0(3^4)$ and $\Gamma_0(3^5)$, *Nagoya Math. J.* **62** (1976), 29–39.

[8] F. Momose, On the ℓ-adic representations attached to modular forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **28** (1981), 89–109.

[9] K. Ribet, Twists of modular forms and endomorphisms of abelian varieties, *Math. Ann.* **253** (1980), 43–62.

[10] K. Ribet, "Endomorphism algebras of abelian varieties attached to newforms of weight 2", Progress in Math. **12** (1981), 263–276.

[11] H. Saito, On a decomposition of spaces of cusp forms and trace formula of Hecke operators, *Nagoya Math. J.* **80** (1980), 129–165.

[12] G. Shimura, Class fields over real quadratic fields and Hecke operators, *Ann. of Math.* **95** (1972), 130–190.

[13] G. Shimura, On the factors of the jacobian varieties of a modular function field, *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 523–544.

[14] G. Shimura, "Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions", Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1971.

[15] M. Yamauchi, On the traces of Hecke operators for a normalizer of $\Gamma_0(N)$, *J. Math. Kyoto Univ.* **13** (1973), 403–411.